ELEME TEKNİKLERİ

Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunun optimal değeri, türevi kullanmayan bazı yöntemlerle de bulunabilir. Bu yöntemlere, eleme yöntemleri(eleme teknikleri) adı verilmektedir.

Eleme teknikleri, optimum çözümü bulunduran çözüm uzayını daha küçük aralıklara indirgeyerek en iyi çözümü araştırır. Her araştırmada optimumu bulundurmayan aralık belirlenip çıkarılır. Eleme teknikleri, optimum noktasını tam olarak vermezler ama optimumun olduğu aralığı mümkün olduğunca küçültmeye çalışılır.

$f(x)$ fonksiyonu x^* minimum noktasına sahip olsun. Eğer x^* noktası $[a,b]$ aralığında ancak değeri tam olarak bilinmiyorsa, bu aralığa "*belirsizlik aralığı*" denir. Minimum noktanın aranması sırasında, minimum noktayı içermeyen kısımlar çıkartılarak aralık küçültülür. n'inci tekrardan sonra aralık çok küçültülerek x^* noktasının değeri yaklaşık olarak elde edilir.

Eleme tekniklerinin uygulanabilmesi için fonksiyonun tek değişkenli ve tek modlu olması gerekir.

Verilen belirsizlik aralığında tek bir maksimum veya minimumu olan fonksiyonlara "*tek modlu fonksiyonlar*" denir.

Tek değişkenli bir fonksiyonun x^* minimum(maksimum) noktasının aynı tarafında bulunan iki noktadan, x^*-a yakın olanı fonksiyona daha küçük(büyük) bir değer veriyorsa bu fonksiyona tek modlu denir. Yani,

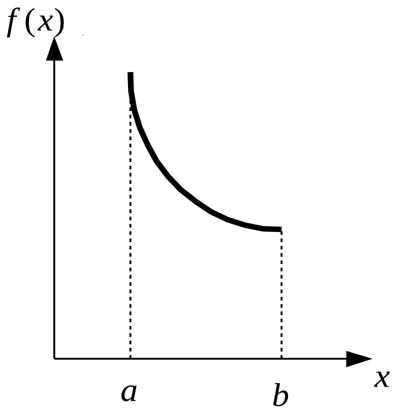
$f(x)$ fonksiyonun minimum noktası x^* olsun.

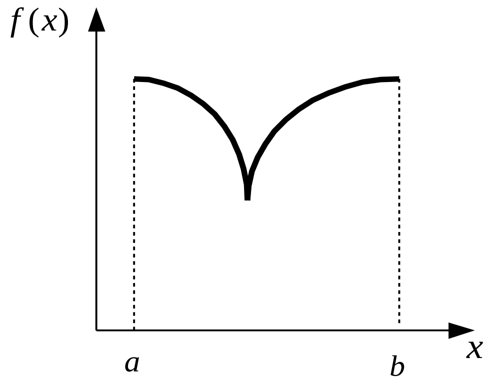
$x_1 < x_2 < x^*$ için $f(x_2) < f(x_1)$ ise,

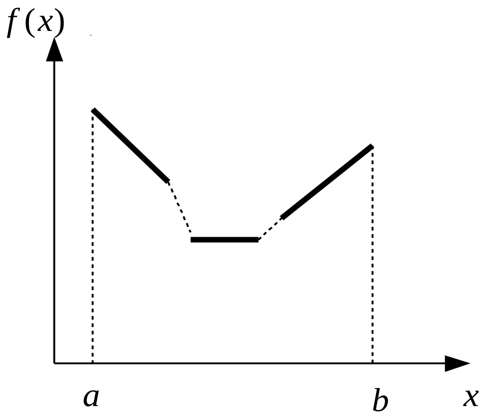
$x^* < x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise

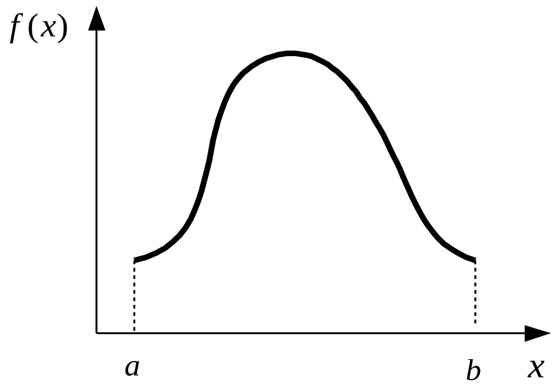
$f(x)$ fonksiyonuna tek modlu fonksiyon denir.

Tek modlu bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir.





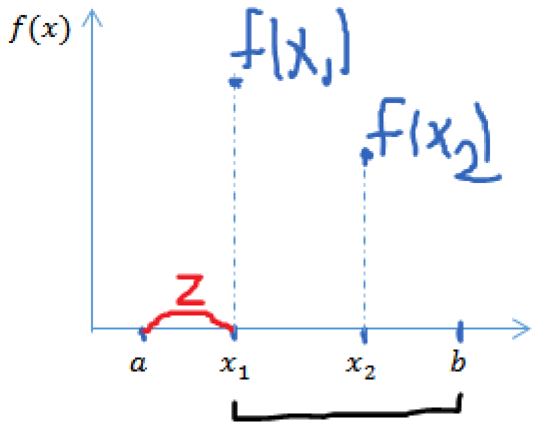




Belirsizlik aralığının küçültülmesi:

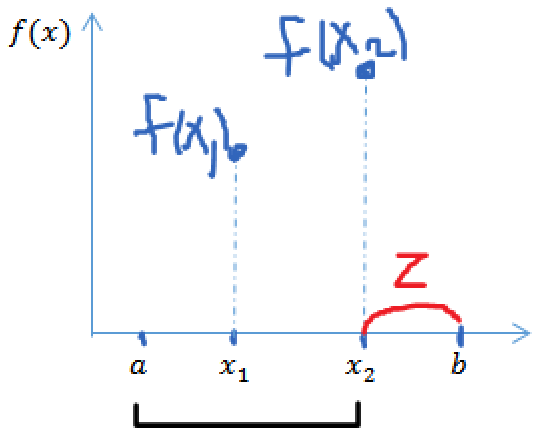
Minimumu aranan $f(x)$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında tek modlu bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve $x_1 < x_2$ olduğunu varsayalım. Eğer;

$f(x_1) > f(x_2)$ olduğunda tüm $z \in [a, x_1]$ noktaları için $f(z) \geq f(x_2)$ ise



yeni belirsizlik aralığı $[x_1, b]$ olur.

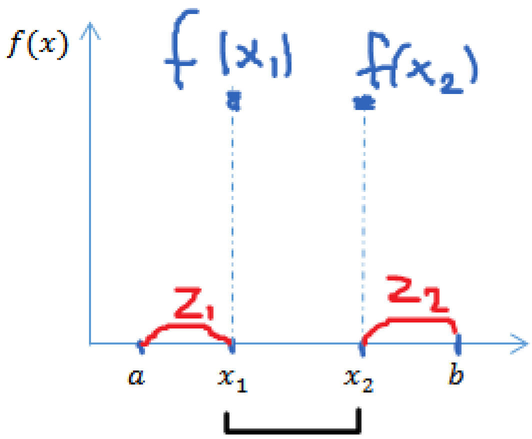
$f(x_1) < f(x_2)$ olduğunda tüm $z \in [x_2, b]$ noktaları için $f(z) \geq f(x_1)$ ise



yeni belirsizlik aralığı $[a, x_2]$ olur.

$f(x_1) = f(x_2)$ olduğunda tüm $z_1 \in [a, x_1]$ ve $z_2 \in [x_2, b]$ noktaları için

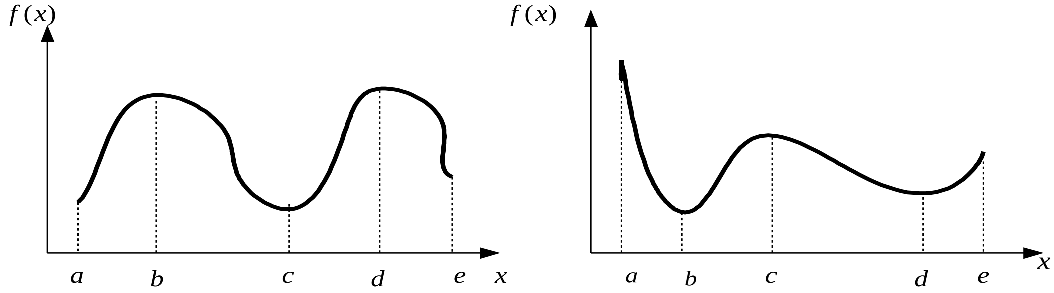
$f(z_1) \geq f(x_1) = f(x_2)$ ve $f(z_2) \geq f(x_1) = f(x_2)$ ise



yeni belirsizlik aralığı $[x_1, x_2]$ olur.

$f(x)$ fonksiyonunun maksimum noktası için de benzer düşünce geçerlidir.

Çok modlu fonksiyonlar, her parçası tek modlu olacak şekilde fonksiyonun değer bölgesi alt parçalara bölünerek eleme teknikler uygulanabilir. Aşağıdaki fonksiyonlar çok modlu fonksiyonlara örnek olarak gösterilebilir.



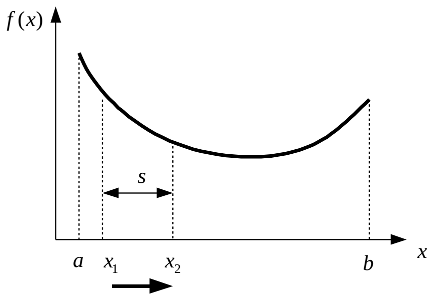
1. Değişkenler Üzerinde Kısıtlama Olmadığında Arama

Çoğu uygulamalı problemlerde optimum çözümün, karar değişkenlerinin kısıtlanmış bir aralığı içerisinde olduğu bilinir. Bazı durumlarda bu aralık bilinmez, bu nedenle de arama değişken değerleri üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın yapılabilir.

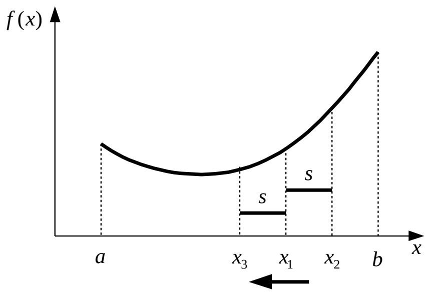
a) Sabit Adımlı Arama:

Sabit bir adım büyüklüğü ile tahmini bir başlangıç noktası seçilir. Bu noktadan, arzulanan yöne doğru gidilerek arama yapılır. Bu arama için aşağıdaki adımlar izlenir.

- Başlangıç noktası (x_1) seçilir ve $f_1 = f(x_1)$ bulunur.
- Adım büyüklüğü s olmak üzere, $x_2 = x_1 + s$ alınıp $f_2 = f(x_2)$ hesaplanır.
- $f_2 < f_1$ ve ilgilenilen problem *minimum* problemi ise $f(x)$' in tek modlu olması nedeniyle minimum çözüm $x < x_1$ bölgesinde bulunamaz. Bu yüzden diğer ikili denemeler incelenip tek modlu varsayımı da kullanılarak pozitif yönde x_2 , x_3, ... noktaları boyunca aramaya devam edilir. $x_i = x_1 + (i-1)s$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu, önceki noktaya göre artma gösterdiği zaman aramaya son verilir.
- $f_2 > f_1$ ise arama ters yönde yapılır ve noktalar $x_i = x_1 - (i-1)s$ olarak seçilir.
- $f_2 = f_1$ ise arzulana minimum nokta x_1 ile x_2 arasındadır.



$f(x_2) < f(x_1)$ olduğundan çözüm x_1' in pozitif yönünde olacaktır. Bu nedenle $x_i = x_1 + (i-1)s$ alınarak aramaya devam edilir. Örneğin yeni nokta $x_3 = x_1 + 2s$ olacaktır.



$f(x_2) > f(x_1)$ olduğundan çözüm x_1' in negatif yönünde olacaktır.

Maksimum probleminde incelenen ardışık noktalarda f fonksiyonu azalma gösterdiğinde arama sonuçlandırılır. Diğer işlemler benzer olarak yürütülür.

Minimum probleminde f değerinde azalma olmadığında, maksimum probleminde ise f değerinde artma olmadığında işlemler durdurulur ve bir önceki nokta optimum çözüm noktası olarak alınır.

ÖRNEK:

$\mathrm{x}_1 = 0$ ve $s = 0.10$ alarak $f(x) = x^2 - 3x$ fonksiyonunun minimumunu araştıralım.

$f_1 = f(x_1) = f(0) = 0$

$f_2 = f(x_2) = f(0 + 0.10) = f(0.10) = 0.01 - 3(0.10) = -0.29$

$f(x_2) < f(x_1)$ olduğundan azalma x_1'in pozitif yönünde olacaktır. Arama noktaları $x_i = x_1 + (i-1)s$ olarak seçilir. Sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

i	s	$x_i = x_1 + (i-1)s$	f_i	$f_i < f_{i-1}$
1	0.10	0	0	-----
2	0.10	0.10	-0.29	E
3	0.10	0.20	-0.56	E
4	0.10	0.30	-0.81	E
5	0.10	0.40	-1.04	E
6	0.10	0.50	-1.25	E
7	0.10	0.60	-1.44	E
8	0.10	0.70	-1.61	E
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
15	0.10	1.40	-2.24	E
16	0.10	1.50	-2.29	E
17	0.10	1.60	-2.24	H

$x_{16} = 1.50$ noktasından sonra fonksiyon değeri tekrar artma göstermeye başladığından bu nokta optimum nokta olarak alınır.

Bu problemde başlangıç noktası $x_1 = 2$ ve $s = 0.1$ alınmış olsaydı başlangıç noktasının negatif yönünde hareket edilerek minimum nokta araştırılacaktı.

ÖRNEK:

$x_1 = -1$ ve $s = 0.5$ alarak

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 2 \\ -x + 4 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun maksimumunu sabit adım araması ile bulalım.

$x_1 = -1$ noktasında $f_1 = -1$ olur.

$x_2 = x_1 + s = -0.5$ ve $f_2 = -0.5$ olacağından, maksimum nokta x_1 başlangıç noktasının pozitif yönündedir, negatif yönde olamaz. Çünkü negatif yönde hareket edilirse fonksiyon değeri iyice azalacaktır. Oysa bizim amacımız maksimumu bulmaktır. Öyleyse arama; $x_i = x_1 + (i-1)s$ düşünülerek x_1'in pozitif yönünde yapılır.

Bu fonksiyon için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i	s	$x_i = x_1 + (i-1)s$	f_i	$f_i < f_{i-1}$
1	0.5	-1	-1	-----
2	0.5	-0.5	-0.5	H
3	0.5	0	0	H
4	0.5	0.5	0.5	H
5	0.5	1	1	H
6	0.5	1.5	1.5	H
7	0.5	2	2	H
8	0.5	2.5	1.5	E

Sekizinci adımda $f_8 < f_7$ olduğundan $x_7 = 2$ noktası maksimum nokta olarak alınabilir.